

# ESPECTROGRAMAS BASADOS EN FUNCIONES WAVELETS

J. Peña

Dep. Volcanología. Museo Nacional de Ciencias Naturales. CSIC. c/ José Gutiérrez Abascal 2. 28006 Madrid

## INTRODUCCIÓN

Las wavelets son funciones matemáticas que se pueden utilizar para filtrar series temporales de datos y analizar la variación de su contenido espectral, ofreciendo una representación tiempo-frecuencia más precisa para las señales no estacionarias (sismos de origen tectónico y volcánico) que el análisis tradicional de Fourier. Representando la evolución temporal del espectro de la señal se puede localizar en el tiempo la ocurrencia de discontinuidades, impulsos y variaciones que escapan a los métodos habituales de análisis. La teoría de wavelets y algunas de las aplicaciones más comunes se explican en los trabajos de Daubechies (1992), Kaiser (1994) y Burrus *et al.* (1998). El fundamento es análogo al del análisis tradicional de señales: una función periódica puede representarse como una suma infinita de otras funciones, por ejemplo una base de exponenciales complejas en el caso de las series de Fourier. La transformada de Fourier permite analizar señales periódicas y es reversible, es decir, permite pasar de un dominio a otro (tiempo y frecuencia en este caso), pero no conserva la información relativa al tiempo estando en el dominio de la frecuencia, y viceversa. La transformada de wavelet también es reversible, con la diferencia de que cualquier base de funciones wavelets es de soporte compacto, lo que permite localizar simultáneamente en tiempo y frecuencia.

Los algoritmos de transformada rápida de Fourier (FFT) y de transformada localizada de Fourier (STFT) son la alternativa clásica cuando se busca la evolución temporal de un espectro de frecuencias. En estos métodos se aplican y solapan ventanas temporales con el objeto de localizar las frecuencias en el tiempo. El inconveniente es que la resolución está dada por el tamaño de la ventana, que es fijo. La STFT utiliza el algoritmo FFT en ventanas de longitud fija, pero pierde resolución temporal a frecuencias mayores que la que corresponde a la longitud de la ventana. Con el solapamiento de ventanas se reduce este problema aunque no se resuelve por completo. Una posible solución sería utilizar ventanas de longitud variable en función de la frecuencia buscada, descartando la información que dan para frecuencias mayores. Esta operación es más simple con un algoritmo basado en la transformada de wavelet; no se calcula ningún promedio sino que se identifica la frecuencia de un determinado ciclo de la serie temporal y se da su posición. Después, los espectrogramas resultantes sirven para detectar patrones de comportamiento en la variación del espectro de manera que las señales se pueden agrupar según esos cambios, identificando cada tipo de evento en un volcán particular.

## LA TRANSFORMADA CONTINUA DE WAVELET (CWT)

Hay dos tipos de transformada de wavelet. La transformada discreta (DWT) actúa sobre la señal de forma semejante a un banco de filtros pasa-altos y pasa-bajos, separando las contribuciones de alta y baja frecuencia de la señal. La transformada continua (CWT) actúa como un filtro pasa-banda, dejando sólo las componentes de frecuencia deseadas. Aunque ambas transformadas pueden utilizarse para tratar el problema de resolución que presenta la STFT, aquí vamos a describir únicamente la transformada continua porque es más eficaz en el estudio de series temporales de datos cuya variación es suave. La transformada discreta se utiliza normalmente para series de datos que presentan grandes variaciones y discontinuidades, como por ejemplo en el tratamiento de imágenes.

La transformada continua se define como una convolución en el tiempo de la señal con la función wavelet (Daubechies, 1992), es decir, se filtra la señal con una función que cumple el mismo papel que la ventana en la STFT, en este caso una ventana de longitud variable en función de la componente espectral deseada. La escala  $s$  de la wavelet determina su tamaño relativo y es proporcional al inverso de la frecuencia, por lo tanto, contiene la información relativa a las componentes espectrales de la señal. En general, no se puede dar una relación más precisa entre la escala y la frecuencia, siempre va a depender de la función que se utiliza y hay que averiguarla en cada caso. Discretizando, la CWT de una serie de  $N$  puntos  $x_n$ , igualmente espaciados una distancia  $\Delta t$ , se define como la convolución de dicha serie con una versión dilatada y trasladada de la wavelet  $\Psi(t)$  (Torrence y Compo, 1998):

$$CWT_x(n, s) = \frac{1}{\sqrt{s}} \sum_{n'=0}^{N-1} x_{n'} \Psi^* \left( \frac{n'-n}{s} \Delta t \right) \quad n = 0 \dots N-1$$

Ya que hay que hacer este producto  $N$  veces para cada escala que se considera, si  $N$  es muy elevado es más rápido hacer los cálculos con algoritmos FFT que aplicando la definición. Teniendo en cuenta el teorema de convolución (Proakis y Manolakis, 1998), resulta que la CWT se puede obtener a partir de la transformada de Fourier inversa del producto de las transformadas directas de la señal y la wavelet:

$$CWT_x(s) = \text{IFFT} \left( \frac{1}{\sqrt{s}} \text{FFT}(x(n, \Delta t)) \text{FFT}(\Psi(n, \Delta t, s)) \right)$$

Como  $s$  es el único parámetro del que depende la transformada, el cálculo de la CWT se puede realizar con algoritmos FFT para cada escala, y de forma simultánea, para todos los puntos de la serie. Un espectrograma se representa habitualmente como el módulo al cuadrado de los coeficientes que resultan de la STFT. De forma similar se utilizan los coeficientes de la CWT en función de la escala en representaciones también llamadas espectrogramas o escalogramas (Rioul y Vetterli, 1995). Estos coeficientes indican el parecido entre la señal y las funciones de la base. Para filtrar los datos se ha elegido la función de Morlet, que es una de las más utilizadas (Torrence y Compo, 1998). También se ha calculado una relación sencilla entre escala y frecuencia que sirve para representar el espectrograma en función de la frecuencia y no de la escala, de manera que la

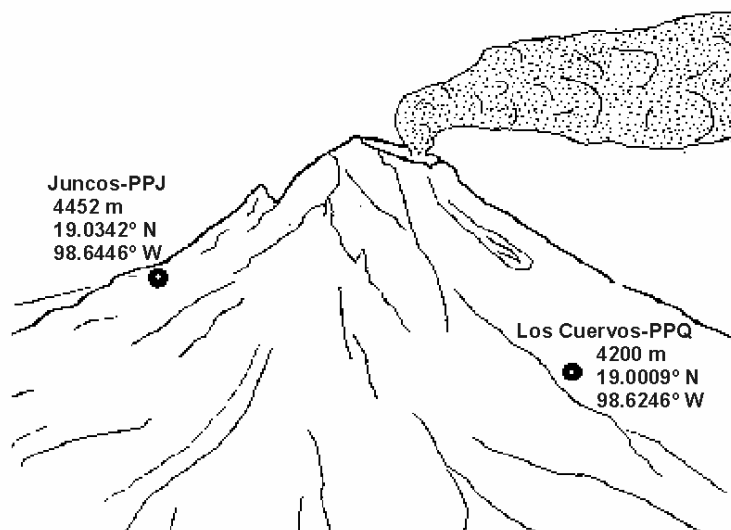
interpretación de los resultados es más intuitiva. Ya que se está tratando con series de datos puede buscarse esa relación de forma numérica. El método que se ha desarrollado consiste en aprovechar la ordenación de la matriz de resultados del algoritmo FFT (Press et al., 1992). Los coeficientes de la transformada rápida de Fourier están ordenados en función del intervalo de muestreo y el número de puntos, de manera que conociendo su posición en la matriz se sabe a qué frecuencia corresponden. La FFT de la función wavelet depende de tres parámetros: número de puntos  $n$ , intervalo de muestreo  $\Delta t$  y escala  $s$ . El número de puntos se refiere a la longitud total de la matriz de datos. Dando valores de escala, para un muestreo y longitud fijas se calcula la FFT de la wavelet. Se localiza el pico o máximo de cada transformada y se identifica su frecuencia por su posición en la matriz de resultados. Con un pequeño programa se puede iterar el proceso para todas las escalas y buscar los picos cercanos a las frecuencias deseadas. Interpolando los puntos obtenidos se tiene una expresión analítica sencilla que relaciona escala y frecuencia.

## **ANÁLISIS CON FUNCIONES WAVELETS**

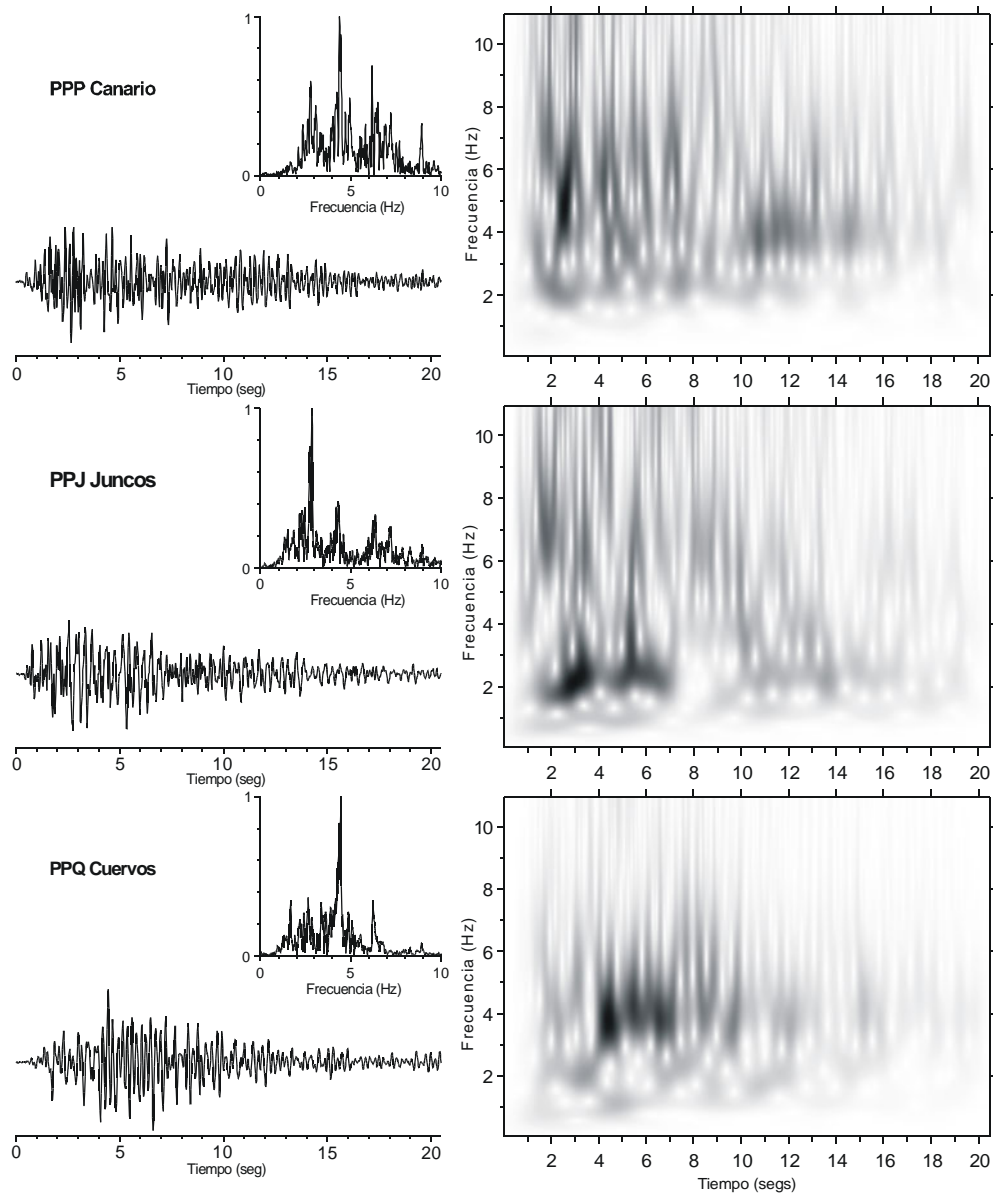
Una vez definidas la función wavelet y su relación frecuencia-escala, se codifican junto con las rutinas de FFT en un programa informático que realiza la convolución y presenta en pantalla el espectrograma del registro a partir del módulo de los coeficientes de la CWT. El esquema de cálculo es el siguiente. Se calcula la FFT del registro, luego se calcula la FFT de la función wavelet escogida para la primera escala considerada, se realiza el producto de convolución, se calcula la FFT inversa y se pintan los coeficientes. El proceso se repite después para todas las escalas restantes. Examinando en el espectrograma la posición de los máximos, se puede localizar el instante en el que ocurren y utilizarlos para distinguir y clasificar los eventos. Al comparar un espectrograma con la FFT se aprecian las diferencias entre el significado de los coeficientes de la FFT y los de la CWT. En el caso de la transformada de Fourier los picos de frecuencia se refieren a todo el registro analizado, y no se conoce si la amplitud de cada pico del espectro corresponde a una zona u otra del registro. Tampoco se conoce si la amplitud de los picos más altos corresponde a unos pocos ciclos de la señal muy energéticos, o si por el contrario es el resultado de sumar las contribuciones de muchos ciclos de menor amplitud que suceden a lo largo de toda o una parte de la señal. Es decir, existe un problema de indeterminación sobre cual es la contribución relativa de cada ciclo de la señal a la amplitud de unos determinados picos del espectro FFT, según su frecuencia. Los coeficientes de la CWT resuelven este problema y asignan una posición temporal y una amplitud relativa a cada ciclo del registro. Así, se puede conocer cual es la contribución relativa de cada frecuencia y en que instante al espectro de la señal.

En sismología volcánica hay varios tipos de sismos, cada uno con un significado diferente, y que nos indican cuales son los procesos que tienen lugar en el interior del edificio volcánico. No es conveniente comparar sismos de unas estaciones con otras sin conocer el efecto de sitio, que normalmente se desconoce, ya que podrían asignarse efectos de camino a la fuente. Para ilustrar el efecto de comparar los espectrogramas de señales registradas en estaciones sísmicas diferentes se han elegido unos registros del Volcán Popocatepetl (México). Se trata de una pequeña explosión ocurrida el 10 de Abril de 1999 y registrada en tres estaciones sísmicas de la red de vigilancia del Popocatepetl (figura 1): Canario (PPP), Juncos (PPJ) y Cuervos (PPQ). En los sismogramas (figura 2) la amplitud de cada registro

viene en unidades arbitrarias y los coeficientes de los espectrogramas están normalizados. Las transformadas de Fourier (FFT) muestran casi los mismos picos de frecuencia aunque sus amplitudes difieren por el llamado efecto de sitio. La estación PPQ es la más alejada al cráter y las altas frecuencias están prácticamente ausentes, por lo que esta atenuación seguramente se debe a un efecto de camino. Los espectrogramas confirman esta hipótesis. En PPP y PPJ aparecen altas frecuencias al comienzo del registro, simultáneamente al comienzo en baja frecuencia. Conforme avanza el registro la alta frecuencia desaparece y la baja permanece. A la vista de los espectrogramas, la interpretación del evento sería una pequeña explosión causada por una acumulación de gases a alta presión, que remueve y rompe el material frágil que pueda estar obstruyendo los conductos (fracturas y explosiones originan altas frecuencias), continuando luego la emisión del fluido restante por los conductos ya abiertos (el movimiento de fluidos produce frecuencias más bajas, que se mezclan con las codas). El posible significado de las altas y bajas frecuencias usado para esta interpretación se encuentra en Ibáñez (1997). En la estación PPQ sólo aparece una banda de frecuencia muy estable a 4 Hz ya que la alta frecuencia se ha atenuado.



**Figura 1.** Esquema del Volcán Popocatépetl (México) visto desde el lado suroeste, con la ubicación de las estaciones sísmicas utilizadas para este análisis. La estación PPQ está situada en la ladera sur y la estación PPJ en la ladera noroeste. La estación PPP (no representada en la figura) está en la ladera norte, a 4170 metros de altitud sobre el nivel del mar, siendo sus coordenadas: 19.0412° N, 98.6280° W. Como referencia, el cráter es una elipse de 800x 600 metros y está situado a 5426 metros de altura.



**Figura 2.** Sismogramas (componente vertical de período corto), FFT y espectrogramas de una explosión ocurrida el 10 de abril de 1999 en el Volcán Popocatepetl. A la derecha de cada sismograma se encuentra el espectrograma correspondiente. La primera fila corresponde a la estación Canario, la segunda a la estación Juncos y la tercera a la estación Cuervos. La hora de inicio es 02:11:40 (hora local) y la frecuencia de muestreo 50 Hz.

## CONCLUSIONES

La transformada continua de wavelet (CWT) puede utilizarse para realizar representaciones tiempo-frecuencia de una serie temporal de datos, en particular de datos sísmicos. Existen otros métodos que trabajan a escalas temporales más grandes, como el SSAM (Seismic Spectral Amplitude Measurement) (Rogers y Stephens, 1995), pero con técnicas de análisis de funciones wavelets se consigue analizar los datos a una escala más fina que la que hace la transformada localizada de Fourier (STFT) (Bartosch y Seidl, 1999). Aparte de la ventaja que proporciona el análisis de la señal a pequeña escala, la principal ventaja práctica de la transformada continua de wavelets es que puede resolverse con la ayuda de los algoritmos tradicionales de transformada de Fourier (FFT), que son métodos suficientemente probados y de uso común en el análisis de señales.

Una vez que se ha conseguido el espectrograma se tiene la herramienta adecuada para analizar la variación espectral de las señales. Estas variaciones o cambios se estudian en el plano temporal, de forma que se puede averiguar el momento de ocurrencia de un determinado pulso. Por esta razón, la CWT da una información más precisa que la que información "estática" que proporcionan los algoritmos FFT por sí solos. Gracias a esta técnica se ha observado cómo los espectrogramas de las señales volcánicas presentan grandes diferencias que permiten distinguir la ocurrencia de unos tipos u otros de eventos (Peña, 1999). En los ejemplos anteriores también se aprecia como los efectos de sitio modifican el espectro de la señal, por lo que esta técnica podría emplearse para el estudio de atenuaciones, análisis de codas, etc.

## REFERENCIAS

- BARTOSCH, T.; SEIDL, D. (1999). *Spectrogram analysis of selected tremor signals using short-time Fourier transform and continuous wavelet transform*. Ann. Geofis. **42 (3)**: 497-506.
- BURRUS, C.S.; GOPINATH, R.A.; GUO, H. (1998). *Introduction to Wavelets and Wavelet Transforms: A Primer*. Prentice Hall. New Jersey. 267 pp.
- DAUBECHIES, I. (1992). *Ten Lectures on Wavelets*. Society for Industrial and Applied Mathematics. Philadelphia. 357 pp.
- IBÁÑEZ, J. (1997). *Apuntes de sismología volcánica*. Curso Internacional de Volcanología y Geofísica Volcánica. Dep. Volcanología - CSIC. Madrid. 89 pp.
- KAISER, G. (1994). *A Friendly Guide to Wavelets*. Birkhäuser. Boston. 300 pp.
- PEÑA, J. (1999). *Algoritmos de clasificación automática de eventos sísmicos de origen volcánico. Análisis de los datos del Volcán Popocatépetl (México)*. Tesis de licenciatura. Dep. Volcanología - CSIC. Madrid. 100 pp.
- PRESS, W.H.; TEUKOLSKY, S.A.; VETTERLING, W.T.; FLANNERY, B.P. (1992). *Numerical Recipes in C. The Art of Scientific Computing (2ª ed.)*. Cambridge University Press. New York. 994 pp.
- PROAKIS, J.G.; MANOLAKIS, D.G. (1998). *Tratamiento digital de señales (3ª ed.)*. Prentice Hall. Madrid. 976 pp.

- RIOUL, O.; VETTERLI, M. (1995). *Wavelets and Signal Processing*. Signal Processing Technology and Applications. Ackenhusen, J.G. (ed.). IEEE Technical Activities Board. New York. pp. 85-109.
- ROGERS, J.A.; STEPHENS, C.D. (1995). *SSAM: real-time seismic spectral amplitude measurement on a PC and its application to volcano monitoring*. Bull. Seism. Soc. Am. **85**: 632-639.
- TORRENCE, C.; COMPO, G.P. (1998). *A practical Guide to Wavelet Analysis*. Bull. Amer. Meteor. Soc. **79**: 61-78.